Ejercicios de Análisis Matemático I
Desigualdades y funciones elementales

1. Estudia los intervalos en los que un trinomio de segundo grado, $p(x) = ax^2 + bx + c$, es positivo o negativo. Debes considerar todos los casos posibles según que el trinomio tenga raíces reales o no.

2. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $\dfrac{1-2x}{x^2-4} > \dfrac{1}{2}$.

3. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $x^3(x+2)(x-3)^2(x+1)^5(x+5)^4 < 0$.

4. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad $\dfrac{|x-1|+2}{1+|x^2-5x+6|} < \dfrac{1}{3}$.

5. Supuesto que $0 < a < b$, calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a+b-x} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

6. Calcula para qué valores de x se verifican las siguientes desigualdades.
$$\text{a) } |x+5| < |x-1|, \text{ b) } |x-1|\,|x+2| = 3, \text{ c) } |x^2-x| > 1, \text{ d) } |x-y+z| = |x| - |z-y|$$

7. Calcula para qué valores de x se verifican las siguientes desigualdades.
$$\text{a) } |x+1| + |x-1| < 1, \quad \text{b) } |2x - |2x-1|| = -2x, \quad \text{c) } |2 + |x+1|| < 3.$$

8. Prueba que cualesquiera sean los números reales positivos $a > 0$ y $b > 0$ se verifica que
$$\frac{a}{2(a+b)\sqrt{b}} < \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a+b}}.$$

9. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la siguiente desigualdad.
$$\frac{x^2-4x-2}{x^3+1} > 0.$$

10. Calcula para qué valores de x se verifica la siguiente desigualdad.
$$\frac{1}{1+|x-3|} < |x-6|.$$

11. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{\log\big(|x-6|(1+|x-3|)\big)}$.

12. Prueba que la función dada por $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Deduce que
$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

13. Prueba que la función $f : [1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - x + 1$ para todo $x \geqslant 1/2$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de f.

14. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{-\operatorname{sen} x} + \sqrt{16 - x^2}$.

15. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x)=\sqrt{\log\dfrac{x^2-8x+4}{x^2-3x+2}}$.

16. Calcula x sabiendo que:
$$\frac{1}{\log_x(a)}=\frac{1}{\log_b(a)}+\frac{1}{\log_c(a)}+\frac{1}{\log_d(a)}.$$

17. Prueba que para todo $x\in[-1,1]$ se verifica la igualdad
$$\arccos x+\operatorname{arc\,sen} x=\frac{\pi}{2}.$$

18. Prueba que para todo $x\in]-1,1[$se verifica la igualdad
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sen} x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

19. *a*) Prueba las igualdades:
$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)};\qquad \operatorname{sen} x=\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}.$$

    b) Sean $a,b\in\mathbb{R}$ tales que $a^2+b^2=1$ y $a\neq-1$. Definamos
$$\vartheta=2\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a+1}$$
    Prueba que ϑ es el único número que verifica que $-\pi<\vartheta<\pi$, $\cos\vartheta=a$ y $\operatorname{sen}\vartheta=b$.

20. Sea $f(x)=x^2-2x$ y $g(x)=2x+1$. Calcula los valores de x para los que $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$.

21. Prueba las igualdades:
$$\cos a=4\cos^3(a/3)-3\cos(a/3)=2\cos^2(a/2)-1.$$
    Usando que $\cos 0=1$, $\cos\pi=-1$, deduce el valor de $\cos(\pi/6)$, $\cos(\pi/4)$ y $\cos(\pi/8)$.

22. Dado un número entero $n\in\mathbb{Z}$, justifica que la función $f:[n\pi-\pi/2,n\pi+\pi/2]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\operatorname{sen} x$, es inyectiva y expresa la inversa de f por medio de la función arcoseno. Representa gráficamente la función $h(x)=\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$ para $x\in[-3\pi+\pi/2,3\pi+\pi/2]$.

23. Justifica, usando las propiedades de la función exponencial, que la función $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada para todo $x\in\mathbb{R}$ por $h(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de h.

24. a) Dado $x\in\mathbb{R}$ prueba que hay un único $t\in\mathbb{R}$ tal que $\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}=x$.

    b) Dado $x\geqslant 1$, prueba que hay un único $t\geqslant 0$ tal que $\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}=x$.

    Sugerencia. Lo que tienes que hacer es calcular t. La sustitución $e^t=u$ te permitirá calcular u.

25. Dado un número $x\neq 0$, calcula un número $t\in\mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{\operatorname{senh} t}=x$.